

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Julio 2011

Realidad Aumentada
Curso Presencial – Consorcio Identic

S.1.3

Fundamentos Matemáticos

Carlos González Morcillo

Carlos.Gonzalez@uclm.es

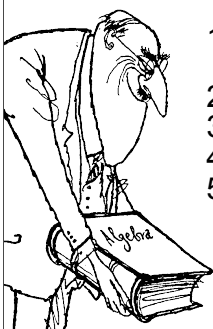
[Http://www.esi.uclm.es/www/cglez](http://www.esi.uclm.es/www/cglez)

Profesor Titular de Universidad
Escuela Superior de Informática
Universidad de Castilla-La Mancha



Identic
consorcio
www.identic.es

Contenidos



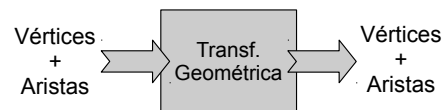
1. Transformaciones Geométricas
2. Representación Matricial
3. Transformaciones Afines
4. Composición
5. Visualización 3D
 - 5.1. Pipeline de Visualización
 - 5.2. Proyección en Perspectiva

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es)

[Trp 2]

Trans. Geométricas

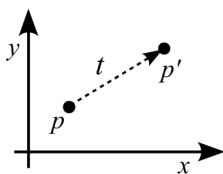
- Necesarias herramientas para transformar primitivas.
- ¡Habitualmente polígonos!



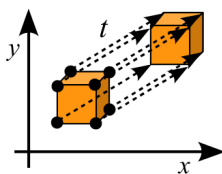
Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es)

[Trp 3]

Ejemplo: Traslación



$$\begin{aligned}p'_x &= p_x + t_x \\ p'_y &= p_y + t_y\end{aligned}$$

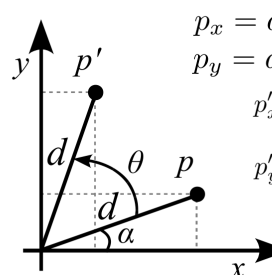


Ejemplo de aplicación sobre todos los vértices del modelo 3D

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es)

[Trp 6]

Ejemplo: Rotación



$$p_x = d \cos \alpha$$

$$p_y = d \sin \alpha$$

$$p'_x = d \cos(\alpha + \theta)$$

$$= d \cos \alpha \cos \theta - d \sin \alpha \sin \theta$$

$$p'_y = d \sin(\alpha + \theta)$$

$$= d \cos \alpha \sin \theta + d \sin \alpha \cos \theta$$

$$p'_x = p_x \cos \theta - p_y \sin \theta$$

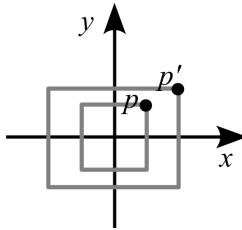
$$p'_y = p_x \sin \theta + p_y \cos \theta$$

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es)

[Trp 10]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

Ejemplo: Escala



$$p'_x = p_x S_x$$

$$p'_y = p_y S_y$$

! Necesario **mecanismo unificado** para aplicar transformaciones!

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 12]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

Repres. Homogénea

Representación Homogénea:
Añade parámetro adicional h

$P(x, y) \rightarrow P_h(x, y, h)$
De forma que $P(x, y) = P(x_h/h, y_h/h)$
siendo $h \neq 0$

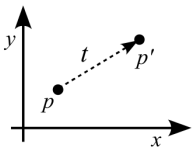
Permite realizar transformaciones sólo mediante multiplicaciones (matricialmente)

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 15]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

Repres. Homogénea

Ejemplo en traslación:



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p'_x = p_x + t_x$$

$$p'_y = p_y + t_y$$

Mismo Resultado!

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 16]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

Repres. Homogénea

Rotación 2D Escalado 2D

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo definir las **transformaciones inversas**, en Rotación, Traslación y Escalado? ¿Y de forma general?

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 18]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

Transform. Afines

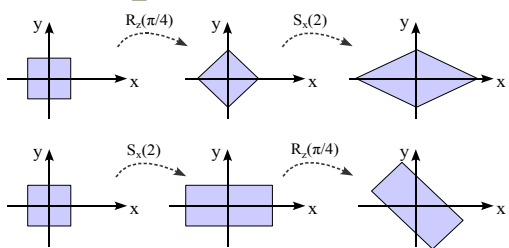
! Expresadas en el Sistema de Referencia Universal.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Traslación	$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Escalado
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Rotación X	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Rotación Y
	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Rotación Z

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 19]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

Composición



Multiplicación de Matrices es asociativa pero **no conmutativa**!

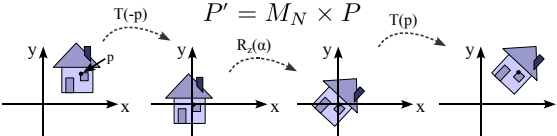
Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 20]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

Composición

Matriz Neta: Obtenida de la composición de las matrices de transformación.

$$P' = T_n \times \dots \times T_2 \times T_1 \times P$$

$$P' = M_N \times P$$


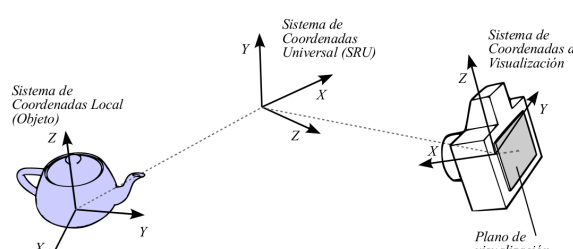
Ejemplo: Rotar el modelo α grados sobre el punto P.
¿Cuál es la M_N ?

Nota: Las transformaciones se expresan respecto del SRU.

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 21]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

Visualización 3D



Relación entre Sistemas de Coordenadas

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 22]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

UCLM

Pipeline 3D

- Coordenadas de Modelo (Locales)
1. Transformación de Modelado
- Coordenadas Universales (del Mundo)
2. Transformación de Visualización
- Coordenadas de Visualización (de Cámara)
3. Transformación de Proyección
- Coordenadas Normalizadas (cubo Unitario)
4. Transformación de Recorte
- Coordenadas *Recortadas*
5. Transformación de Pantalla
- Coordenadas de Pantalla

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 23]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

UCLM

Transf. Modelado

Aplicamos la transformación global a cada vértice del modelo.

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 25]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

UCLM

Tr. Visualización

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 27]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

UCLM

Tr. Proyección

$$\frac{p'_x}{p_x} = \frac{-d}{p_z} \Leftrightarrow p'_x = \frac{-d p_x}{p_z}$$

$$p' = M_p p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 31]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

UCLM

Modelo General

La matriz general de proyección en perspectiva se expresa como:

$$M_p = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 34]

IdenTIC Realidad Aumentada Transform. Matrices T. Afines Composición Visualización

UCLM

Pipeline 3D

Vértices Nuevos

Carlos González Morcillo (Carlos.Gonzalez@uclm.es) [Trp 36]